UNIVERSIDAD DEL CEMA
Buenos Aires
Argentina

Serie
DOCUMENTOS DE TRABAJO

Área: Ingeniería

ENFOQUE MATRICIAL AL PROBLEMA DE LAS PARTICIONES

Gabriel Pérez Lance

Marzo 2019
Nro. 688

www.cema.edu.ar/publicaciones/doc_trabajo.html
UCEMA: Av. Córdoba 374, C1054AAP Buenos Aires, Argentina
ISSN 1668-4575 (impreso), ISSN 1668-4583 (en línea)
Editor: Jorge M. Streb; asistente editorial: Valeria Dowding jae@cema.edu.ar

Enfoque matricial al problema de las particiones

Gabriel Pérez Lance [1]

Resumen

Dado un conjunto con determinada cantidad de elementos, es posible calcular la cardinalidad del conjunto formado por todos los subconjuntos del conjunto dado, que cumplen con la propiedad de ser disjuntos y tal que además la unión de todos ellos sea el conjunto original. Esto es, determinar el número total de posibles particiones para el conjunto especificado.
El objetivo es abordar el tema con un enfoque matricial y mediante elementos de álgebra lineal. También se analiza el caso en el cual se consideran a los elementos como indistinguibles, y por lo tanto se pretende calcular el número de clases de particiones, es decir obtener la función de partición. Se aplican las ecuaciones obtenidas a un caso puntual y se verifican con las expresiones y valores existentes con respecto a esta temática.

1. Introducción

Para decidir cómo asignar tareas, cómo distribuir recursos, o bien conocer la cantidad de alternativas existentes en ciertos problemas de combinatoria, puede tener importancia determinar el número de particiones del conjunto bajo estudio. En algunos casos, es relevante la identificación de los elementos que lo forman, o bien las categorías a las que estos elementos pertenecen; por ejemplo al asignar roles jerárquicos es diferente cómo asignamos esos roles a las personas que podrían cubrirlos. En otras situaciones los elementos del conjunto verifican una relación de equivalencia de modo tal que no es preciso considerar su individualidad; tal podría ser el caso en que se pretende formar grupos – con todos los participantes en un plano de igualdad – y en esta situación entonces es irrelevante la identidad de cada uno. Se busca entonces y para ambas situaciones obtener expresiones y relaciones que permitan calcular el número de posibles particiones de un conjunto dado.

2. Desarrollo

Consideramos el conjunto A, no vacío y con cardinalidad finita igual a n.

$$A = \{a_1, a_2, ..., a_n\} \tag{1}$$

entonces el conjunto de partes de A será:

[1] Los puntos de vista expresados en esta publicación son los del autor y no necesariamente los de la Universidad del CEMA.

$$P(A) = \{\{\}, \{a_1\}, ..., \{a_2, a_3\}, ..., A\} \tag{2}$$

Si T_i es un elemento del conjunto de partes, entonces habrá 2^n elementos T_i en $P(A)$.

El conjunto de subconjuntos (no vacíos) T_i del conjunto de partes, que verifiquen

$$\forall T_i \; \forall T_j \; i \neq j \;\; \Rightarrow T_i \cap T_j = \emptyset \tag{3}$$

y que además cumplan con que

$$\bigcup_{(i)} T_i = A \tag{4}$$

constituyen una partición $Q_m(A)$

Denominamos W al conjunto de todas las particiones Q_m del conjunto A.

Si tomamos un conjunto A_n tal que $card(A_n) = n$, entonces el conjunto W_n será:

$$W_n = \{ \; \{\{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}, ..., \{a_n\}\} \; , \; \{\{a_1, a_2\}, \{a_3\}, ..., \{a_n\}\} \; ,$$
$$\{\{a_1, a_3\}, \{a_2\}, ..., \{a_n\}\} \; , \; \{\{a_2, a_3\}, \{a_1\}, ..., \{a_n\}\} \; , \; ... \; , \; \{\{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}\} \; \} \tag{5}$$

Llamamos r_n^k al número de particiones de A_n que están formadas por k subconjuntos, o sea:

$$r_n^k = card\{x \in W_n \; / \; card(x) = k\} \tag{6}$$

entonces según (5) para las diferentes particiones en W_n será:

$$r_n^n = 1 \; , \; r_n^{n-1} = c_1 \; , \; r_n^{n-2} = c_2 \; , \; r_n^{n-3} = c_3 \; , \; r_n^{n-4} = c_4 \; , \; ... \; , \; r_n^1 = 1 \tag{7}$$

donde $c_k \in \mathbb{N}$
Si ahora consideramos un conjunto A_{n+1}, tal que $A_{n+1} = A_n \cup \{a_{n+1}\}$, entonces $card(A_{n+1}) = n + 1$, entonces el conjunto W_{n+1} tendrá:

un subconjunto formado por las particiones anteriores y agregando a cada una de ellas un subconjunto que sólo tiene el conjunto unitario formado por el elemento a_{n+1}:

$$\{ \; \{\{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}, ..., \{a_n\}, \{a_{n+1}\}\} \; , \; \{\{a_1, a_2\}, \{a_3\}, ..., \{a_n\}, \{a_{n+1}\}\} \; ,$$
$$\{\{a_1, a_3\}, \{a_2\}, ..., \{a_n\}, \{a_{n+1}\}\} \; , \; \{\{a_2, a_3\}, \{a_1\}, ..., \{a_n\}, \{a_{n+1}\}\} \; , \; ... \; , \; \{\{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}\{a_{n+1}\}\} \; \} \tag{8}$$

y otro subconjunto que resulta de insertar el elemento a_{n+1} en cada uno de los subconjuntos de cada partición:

$$\{ \ \{\{a_1, a_{n+1}\}, \{a_2\}, \{a_3\}, ..., \{a_n\}\} \ , \ \{\{a_1, a_2, a_{n+1}\}, \{a_3\}, ..., \{a_n\}\} \ ,$$
$$\{\{a_1, a_3\, a_{n+1}\}, \{a_2\}, ..., \{a_n\}\} \ , \ \{\{a_2, a_3\}, \{a_1\}, ..., \{a_n, a_{n+1}\}\} \ , \ ... \ , \ \{\{a_1, a_2, a_3, ..., a_n, a_{n+1}\}\} \ \} \tag{9}$$

entonces la unión de (8) y (9) permite obtener:

$$W_{n+1} = \{ \ \{\{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}, ..., \{a_n\}, \{a_{n+1}\}\} \ , \ \{\{a_1, a_2\}, \{a_3\}, ..., \{a_n\}, \{a_{n+1}\}\} \ ,$$
$$\{\{a_1, a_3\}, \{a_2\}, ..., \{a_n\}, \{a_{n+1}\}\} \ , \ \{\{a_2, a_3\}, \{a_1\}, ..., \{a_n\}, \{a_{n+1}\}\} \ , \ ... \ , \ \{\{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}\{a_{n+1}\}\} \ \}$$
$$\{ \ \{\{a_1, a_{n+1}\}, \{a_2\}, \{a_3\}, ..., \{a_n\}\} \ , \ \{\{a_1, a_2, a_{n+1}\}, \{a_3\}, ..., \{a_n\}\} \ ,$$
$$\{\{a_1, a_3\, a_{n+1}\}, \{a_2\}, ..., \{a_n\}\} \ , \ \{\{a_2, a_3\}, \{a_1\}, ..., \{a_n, a_{n+1}\}\} \ , \ ... \ , \ \{\{a_1, a_2, a_3, ..., a_n, a_{n+1}\}\} \ \} \tag{10}$$

entonces según (10) para las diferentes particiones en W_{n+1} será:

$$r_{n+1}^{n+1} = 1 \ , \ r_{n+1}^{n} = c_1 + n \ , \ r_{n+1}^{n-1} = c_2 + (n-1)c_1 \ , \ r_{n+1}^{n-2} = c_3 + (n-2)c_2 \ , \ r_{n+1}^{n-3} = c_4 \ , \ ... \ , \ r_n^1 = 1 \tag{11}$$

por lo tanto:

$$\begin{array}{l} \ldots \\ r_{n+1}^{n+1} = 1 \\ r_{n+1}^{n} = c_1 + n \\ r_{n+1}^{n-1} = c_2 + (n-1)c_1 \\ r_{n+1}^{n-2} = c_3 + (n-2)c_2 \\ r_{n+1}^{n-3} = c_4 + (n-3)c_3 \\ \ldots \end{array} \tag{12}$$

y siendo

$$r_n^n = 1 \ , \ r_n^{n-1} = c_1 \ , \ r_n^{n-2} = c_2 \ , \ r_n^{n-3} = c_3 \ , \ r_n^{n-4} = c_4 \tag{13}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{array}{l} \ldots \\ r_{n+1}^{n+1} = r_n^n \\ r_{n+1}^{n} = r_n^{n-1} + n\, r_n^n \\ r_{n+1}^{n-1} = r_n^{n-2} + (n-1)\, r_n^{n-1} \\ r_{n+1}^{n-2} = r_n^{n-3} + (n-2)\, r_n^{n-2} \\ r_{n+1}^{n-3} = r_n^{n-4} + (n-3)\, r_n^{n-3} \\ \ldots \end{array} \tag{14}$$

Definiendo a la matriz de transición entre los estados r_{n+1} y r_n como:

$$M = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & n-4 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 1 & n-3 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 1 & n-2 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 1 & n-1 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & n & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \tag{15}$$

entonces

$$\begin{bmatrix} \dots \\ r_{n+1}^{n-4} \\ r_{n+1}^{n-3} \\ r_{n+1}^{n-2} \\ r_{n+1}^{n-1} \\ r_{n+1}^{n} \\ r_{n+1}^{n+1} \\ \dots \end{bmatrix} = M \, . \begin{bmatrix} \dots \\ r_{n}^{n-4} \\ r_{n}^{n-3} \\ r_{n}^{n-2} \\ r_{n}^{n-1} \\ r_{n}^{n} \\ r_{n}^{1} \\ \dots \end{bmatrix} \tag{16}$$

entonces si consideramos - a modo de ejemplo - los primeros 6 valores, sería:

$$\begin{bmatrix} r_6^1 \\ r_6^2 \\ r_6^3 \\ r_6^4 \\ r_6^5 \\ r_6^6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} r_5^1 \\ r_5^2 \\ r_5^3 \\ r_5^4 \\ r_5^5 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{17}$$

La matriz M asociada a la transición es una matriz triangular y por lo tanto sus autovalores son los elementos de la diagonal, y por ser todos distintos - puesto que son los primeros n números naturales - entonces es diagonalizable.

Además, la transición entre dos estados consecutivos cualesquiera para todo $n < s$, tendrá asociada la misma matriz M, entonces

$$\forall n : n < s \quad r_{n+1} = M^n \, . \, r_1 \tag{18}$$

Dado que la matriz M es diagonalizable, se puede escribir:

$$M = P.D.P^{-1} \tag{19}$$

entonces

$$M^n = (P.D.P^{-1})^n = P.D^n.P^{-1} \tag{20}$$

siendo

$$D^n = \begin{bmatrix} 1^n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 2^n & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 3^n & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 4^n & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5^n & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6^n & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad r_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} \tag{21}$$

De acuerdo con la definición dada para r_n^k, la sumatoria las filas de r_n representa el número B_n de particiones asociado al conjunto A_n.

la sumatoria de las filas de una matriz equivale a premultiplicar por la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$

Entonces, dado que el número de particiones para un conjunto A de $n+1$ elementos es $B(n+1)$ y es la suma de las filas de r_{n+1}, entonces

$$B(n+1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}.r_{n+1} \tag{22}$$

por lo tanto

$$B(n+1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}.(P.D^n.P^{-1}.r_1) \tag{23}$$

y así:

$$B(n+1) = (\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}.P).D^n.(P^{-1}.r_1) \tag{24}$$

Es decir que se pueden obtener los números de Bell (el número de particiones para un conjunto dado), multiplicando la matriz fila que contiene la suma de todas las filas de la matriz de autovectores, por la matriz D^n, y luego multiplicando por la matriz $P^{-1} \,.\, r_1$.

para obtener $P^{-1} \,.\, r_1$ - puesto que r_1 es una matriz columna con todos sus elementos iguales a cero, excepto el primero que vale 1 - entonces sólo necesitamos la primer columna de la inversa de P.

Para calcular esa primer columna mencionada, planteamos el sistema lineal $P.X = col_1(I)$ (1er columna de la matriz identidad), y así, este vector X obtenido, es justamente $P^{-1} \,.\, r_1$. Finalmente, para todo $n < s$, se obtiene una funcion de n que devuelve para cada n el B_n buscado.

A continuación se analiza el caso donde cada elemento del conjunto es indistinguible. Es decir, tenemos un conjunto y queremos saber cuántas particiones hay de cada tipo sin importar qué elementos contiene cada subconjunto, sino que lo que interesa es el formato de cada una de las particiones.

Por ejemplo tenemos una partición formada por 3 subconjuntos de modo tal que uno de ellos tiene 4 elementos, otro subconjunto tiene 3 elementos y otro tiene 2 elementos, no importa qué elementos están en cada subconjunto, lo que importa es que esa partición consta de subconjuntos con esos tamaños específicos.

En otras palabras si dentro del conjunto de las particiones se define una relación de equivalencia estableciendo que dos particiones son equivalentes si y sólo si todos los subconjuntos que la forman tienen los mismos cardinales respecivamente, entonces el objetivo es calcular el cardinal del conjunto cociente.
Si el conjunto A_n tiene n elementos, entonces denominamos N_n al cardinal del conjunto cociente.

Para identificar cada una de las particiones utilizamos códigos definidos por sucesiones de números naturales no creciente y tal que cada uno de los elementos de la sucesión es el cardinal de los subconjuntos que forman la partición.

A modo de ejemplo: una partición formada por 7 subconjuntos cada uno de ellos conteniendo 4 elementos, 3 elementos, 3 elementos, 2 elementos, 1 elemento, 1 elemento y 1 elemento, tendria asociado el código 4 3 3 2 1 1 1.

Como por definición los códigos siempre tienen sus elementos de manera no creciente, entonces dos particiones son equivalentes si y sólo si tienen el mismo código. Por lo tanto cada código identifica a una clase de equivalencia.

Definimos ahora una función f que toma un código y le hace corresponder otro código que denominaremos *siguiente*.

Dicha función se define del siguiente modo: se toma, dentro del código, el dígito mayor que 1 y que esté lo más a la derecha posible, y se lo disminuye en 1, luego se pone a la derecha del dígito que se disminuyó, digitos que formen un código válido lo más grande posible. Consideraremos que un código es mayor que otro si y solo si comienza con un dígito mayor, o en caso de ser iguales, el siguiente dígito es mayor, y así de manera recursiva.

Entonces, a modo de ejemplo, si comenzamos con el código 5, entonces aplicando sucesivamente la función f definida anteriormente, obtendríamos la siguiente cadena de códigos:

5, 4 1, 3 2, 3 1 1, 2 2 1, 2 1 1 1, 1 1 1 1 1

o si comenzáramos con el código 7 la cadena sería:

7, 6 1, 5 2, 5 1 1, 4 3, 4 2 1, 4 1 1 1, 3 3 1, 3 2 2, 3 2 1 1, 3 1 1 1 1, 2 2 2 1, 2 2 1 1 1, 2 1 1 1 1 1, 1 1 1 1 1 1 1

En el primer ejemplo se trata de un conjunto A cuyo cardinal es 5, y la cadena de códigos representa todos los diferentes posibles tipos de particiones: 5 equivale a una partición formada por el mismo conjunto A, 4 1 representa una partición con 4 elementos en un subconjunto y en otro subconjunto 1 elemento, y así análogamente, hasta el último código 1 1 1 1 1 que hace referencia a una partición formada por 5 subconjuntos de 1 elemento en cada uno. De modo similar se interpreta la cadena que se obtiene en el segundo ejemplo.

Pero entonces, para conocer el cardinal del conjunto cociente asociado a un conjunto A_n, bastaría con conocer la longitud de la cadena cuyo código comienza con n.

Definimos ahora S_i^j como el número de códigos que comienzan con j como primer elemento, y el resto de sus elementos suman i. Por ejemplo en el caso anterior para la cadena que comienza en 7, S_5^2 es igual a 3 pues hay justamente 3 códigos involucrados, y serían:

2 2 2 1, 2 2 1 1 1, 2 1 1 1 1 1

es decir hay 3 códigos cuyo 1er elemento es un 2 y tal que los restante (la cola del código) suma 5.

Los S_i^j presentan algunas propiedades.
Consideremos la cadena:

8, 7 1, 6 2, 6 1 1, 5 3, 5 2 1, 5 1 1 1, 4 4, 4 3 1, 4 2 2, 4 2 1 1, 4 1 1 1 1, 3 3 2, 3 3 1 1, 3 2 2 1, 3 2 1 1 1, 3 1 1 1 1 1, 2 2 2 2, 2 2 2 1 1, 2 2 1 1 1 1, 2 1 1 1 1 1 1 vemos que S_5^3=5 ya que se trata de los códigos:

3 3 2
3 3 1 1
3 2 2 1
3 2 1 1 1
3 1 1 1 1 1

en estos códigos hay dos grupos: los que el 2do elemento es también un 3:

3 3 2
3 3 1 1

y los que el 2do elemento es menor que lo que es el primero (es decir es un 2 o un 1):

3 2 2 1
3 2 1 1 1
3 1 1 1 1 1

para el primer grupo, la cantidad es igual a 2 y es justamente:

S_2^3 (3 2, 3 1 1)

pues al agregar un 3 a la izquierda dan los códigos de ese primer grupo.

En el segundo grupo el número de códigos es 3 y es la misma cantidad que habría si fueran los códigos:

2 2 2 1
2 2 1 1 1
2 1 1 1 1 1

y visto así se observa que sería igual a S_5^2

entonces S_5^3=S_5^2+S_2^3

y en el caso general:

$$S_i^j = S_i^{j-1} + S_{i-j}^j \quad \forall i \; \forall j \; i \geq j \tag{25}$$

para los casos en que $i < j$, entonces el primer elemento j no representará ninguna limitación en cuanto a todos los elementos restantes del código para sumar i, y por lo tanto será igual a N_i, es decir:

$$S_i^j = N_i \;\; \forall i \; \forall j \; i < j$$

de acuerdo con la cadena mostrada anteriormente, o bien utilizando de manera recursiva la ecuación (25)

surge que

$$N_i = 1 + \sum_{k=1}^{i-1} S_{i-k}^k \tag{26}$$

donde N_i repesenta el cardinal del conjunto cociente buscado

3. Aplicación de las ecuaciones desarrolladas

De acuerdo con lo desarrollado previamente, la matriz

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

permite materializar las transiciones desde r_1 hasta r_7

Por tratarse de una matriz triangular, sus autovalores son:

$\lambda_i = m_{ii}$ con $i = 1..7$

Calculamos los autovectores asociados a cada autovalor de la matriz M. Estos autovectores forman las columnas de la matriz P:

$$P = \begin{bmatrix} 6!/0! & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6!/1! & -5!/0! & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6!/2! & 5!/1! & 4!/0! & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6!/3! & -5!/2! & -4!/1! & -3!/0! & 0 & 0 & 0 \\ 6!/4! & 5!/3! & 4!/2! & 3!/1! & 2!/0! & 0 & 0 \\ -6!/5! & -5!/4! & -4!/3! & -3!/2! & -2!/1! & -1!/0! & 0 \\ 6!/6! & 5!/5! & 4!/4! & 3!/3! & 2!/2! & 1!/1! & 0!/0! \end{bmatrix}$$

ahora sumamos las filas de la matriz P, es decir calculamos

$\Sigma P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} .P$

y resulta:

$$\Sigma P = \begin{bmatrix} 265 & -44 & 9 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

además debemos obtener $P^{-1}.r_1$, pero como $r_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, entonces sólo necesitaremos

$col_1(P^{-1})$, por lo tanto resolviendo:

$P.X = col_1(I)$

se obtiene que $P^{-1}.r_1 = \begin{bmatrix} 1/720 \\ -1/120 \\ 1/48 \\ -1/36 \\ 1/48 \\ -1/120 \\ 1/720 \end{bmatrix}$

Recordemos que la diagonalización de M es:

$M = P.D.P^{-1}$, donde D es una matriz diagonal que está formada con los autovalores de M

entonces

$$D^n = \begin{bmatrix} 1^n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7^n \end{bmatrix}$$

y así, dado que el número de particiones para un conjunto A de $n+1$ elementos es $B(n+1)$ y es la suma de las filas de r_{n+1}, entonces

$$B(n+1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} .r_{n+1}$$

pero como $r_{n+1} = M.r_n$ entonces $r_{n+1} = M^n.r_1$ implica $r_{n+1} = (P.D^n.P^{-1}).r_1$

así:

$$B(n+1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} .(P.D^n.P^{-1}.r_1)$$

y

$$B(n+1) = (\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} .P).D^n.(P^{-1}.r_1)$$

entonces

$$B(n+1) = \begin{bmatrix} 265 & -44 & 9 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} .D^n. \begin{bmatrix} 1/720 \\ -1/120 \\ 1/48 \\ -1/36 \\ 1/48 \\ -1/120 \\ 1/720 \end{bmatrix}$$

obteniendo así:

$$B(n+1) = \frac{265}{720} + \frac{44}{120}\, 2^n + \frac{9}{48}\, 3^n + \frac{2}{36}\, 4^n + \frac{1}{48}\, 5^n + \frac{1}{720}\, 7^n$$

entonces

$$B(n) = \frac{265}{720} + \frac{44}{120}\, 2^{n-1} \frac{9}{48}\, 3^{n-1} + \frac{2}{36}\, 4^{n-1} + \frac{1}{48}\, 5^{n-1} + \frac{1}{720}\, 7^{n-1}$$

simplificando

$$B(n) = \frac{53}{144} + \frac{11}{60}\, 2^n + \frac{1}{16}\, 3^n + \frac{1}{72}\, 4^n + \frac{1}{240}\, 5^n + \frac{1}{5040}\, 7^n$$

si evaluamos la expresión anterior, obtenemos:

$B(1) = 1, B(2) = 2, B(3) = 5, B(4) = 15, B(5) = 52, B(6) = 203, B(7) = 877$
que son, efectivamente, números de Bell.

Vemos que por ejemplo para el caso de un conjunto de 3 elementos, las 5 particiones posibles serían:

$\{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$
$\{\{a, b\}, \{c\}\}$
$\{\{b\}, \{a, c\}\}$
$\{\{b, c\}, \{a\}$
$\{\{a, b, c\}\}$

En caso de querer determinar la función de partición, es decir el número de tipo de particiones, considerando los elementos del conjunto como indistinguibles, entonces en base a lo desarrollado anteriormente, debemos construir la matriz cuyos elementos son:

$$S_i^j = \begin{cases} S_i^{j-1} + S_{i-j}^j \ \forall i \forall j \ i \geq j \\ N_i \ \forall i \ \forall j \ i < j \end{cases} \tag{27}$$

además

$$S_i^1 = 1 \ \forall i \tag{28}$$

y

$$S_1^j = 1 \ \forall j \tag{29}$$

entonces:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 6 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 1 & 4 & 7 & 9 & 10 & 11 & 11 & 11 \\ 1 & 4 & 8 & 11 & 13 & 14 & 15 & 15 \\ 1 & 5 & 10 & 15 & 18 & 20 & 21 & 22 \end{bmatrix} \tag{30}$$

En donde se observa que la función de partición es la diagonal de dicha matriz.

4. Resultados y conclusiones

Según se puede comprobar en ambos casos - tanto en el cálculo del número de particiones como así también para el cálculo del número de clases de equivalencia - los resultados obtenidos coinciden con los valores reales según cada una de las definiciones. Las ecuaciones obtenidas representan una manera alternativa de calcular el número de particiones y permiten observar algunas relaciones interesantes como por ejemplo la conexión entre autovectores y autovalores, con los números de Bell. Adicionalmente deja planteada la posibilidad de avanzar en la búsqueda de fórmulas que resulten en un modelo compacto para el cálculo de la funciones de partición.

5. Referencias

Apostol, T. , (1984), Introducción a la teoría analítica de números, cap. 14, Reverté
Rojo, A. , (1995), Álgebra II, cap. 8, El Ateneo
Grossman, S. , (1996), Álgebra lineal, cap. 6, Bogotá, McGraw-Hill