UNIVERSIDAD DEL CEMA
Buenos Aires
Argentina

Serie
DOCUMENTOS DE TRABAJO

Área: Finanzas

VALUACIÓN DE TÍTULOS DE DEUDA INDEXADOS AL COMPORTAMIENTO DE UN ÍNDICE ACCIONARIO: UN MODELO CON RIESGO DE CRÉDITO, PARTE 2

Marcelo F. Perillo

Abril 2021
Nro. 790

www.cema.edu.ar/publicaciones/doc_trabajo.html
UCEMA: Av. Córdoba 374, C1054AAP Buenos Aires, Argentina
ISSN 1668-4575 (impreso), ISSN 1668-4583 (en línea)
Editor: Jorge M. Streb; asistente editorial: Valeria Dowding <jae@cema.edu.ar>

Valuación de Títulos de Deuda Indexados al Comportamiento de un Índice Accionario: Un Modelo con Riesgo de Crédito, Parte 2

Marcelo F. Perillo, PhD (*)

Universidad del CEMA, Argentina

Resumen

El objetivo del presente trabajo es abordar la valuación de una clase particular de productos estructurados, consistentes en títulos de deuda cupón cero cuya función de pagos está atada al comportamiento de otra variable, en el caso bajo análisis un índice accionario. Su contribución consiste en la proposición de una fórmula o "*closed form solution*", bajo supuestos estándares en la valuación de instrumentos financieros derivados y la existencia de riesgo de crédito, constituyendo este una continuación del trabajo publicado anteriormente en esta Serie [15].

Keywords – Productos Estructurados, Valuación de Opciones, Riesgo de Crédito, Approach Estructural, Opciones Vulnerables.

(*) Las opiniones vertidas en este trabajo son personales del autor y no reflejan necesariamente los puntos de vista de la UCEMA. Comentarios bienvenidos a mperillo@ucema.edu.ar

Introducción

Como señalamos en el resumen, el próposito del presente trabajo consiste en proponer una solución cerrada o "*closed form solution*" para la valuación de un tipo particular de productos estructurados (en adelante PE). Su extensión a diferentes estructuras que pueden encontrarse en el mercado resulta en general simple.

La descripción del PE cuya valuación abordaremos fue descripta en un trabajo anterior, publicado bajo el título *"Valuación de Títulos de Deuda Indexados al Comportamiento de un Índice Accionar: Un Modelo sin Riesgo de Crédito"*, en la Serie de Documentos de Trabajo de la Universidad del CEMA, Perillo (2021). No obstante ello, a efectos de permitir una lectura independiente del presente, reiteraremos algunos aspectos que consideramos centrales para comprender el producto, y fundamentalmente su promesa de flujos de fondos.

El PE bajo análisis se trata de un bono (real, emitido por un Banco de Inversión) cupón cero cuya función de pagos está dada por:

- Valor Nominal si el subyacente termina por debajo de un cierto valor (límite inferior), que usualmente coincide con su valor al momento de la emisión.

- Valor Nominal más la rentabilidad del subyacente si este termina por encima del valor mínimo pero por debajo de cierto valor (límite superior).

- Valor Nominal más un interés establecido en las condiciones de emisión si al vencimiento del bono el subyacente se encontrara por encima del límite superior.

Las características de la función de pagos del instrumento, esto es su pago contingente o derivado del comportamiento de otro activo subyacente, inducen a la aplicación de la teoría de valuación de instrumentos derivados.

No obstante ello, los modelos que se aplican comúnmente en la valuación de derivados en general, y opciones en particular, ignoran habitualmente el riesgo de crédito del emisor, omisión que no presenta relevancia cuando tales instrumentos derivados son negociados en mercados regulados en los cuales operan garantías y resguardos que minimizan el riesgo de incumplimiento. No es sin embargo este el caso general de los productos a los que hacemos referencia en el presente trabajo y por ello cabe esperar la existencia de un spread entre el precio de mercado y el valor que arroja nuestro modelo sin riesgo de crédito presentado en el trabajo anterior, spread que podría servir también, en un ejercicio de ingeniería inversa, para apreciar el riesgo de crédito del emisor del PE.

A efectos de incorporar tal riesgo apelaremos a la metodología propuesta por Robert Merton (1974), conocida como Approach Estructural, y a la literatura sobre valuación de opciones vulnerables, esto es opciones expuestas al riesgo de crédito del emisor, que repasamos en la sección a continuación.

Revisión de la Literatura

Diversas metodologías se han propuesto en la literatura para la valuación del riesgo de crédito. A efectos de una representación simplificada, las dividiremos en los siguientes tres grupos. Uno de ellos está representado por lo que se conoce como *Approach Estructural*, cuya idea central consiste en vincular el default con la relación entre el valor del activo y el valor de la deuda, o con un cierto valor de referencia. El evento de default en este modelo se presenta cuando el valor del activo cae por debajo del valor de la deuda o de dicho valor de referencia. En un segundo grupo podríamos incluir a los *Modelos Empíricos***,** cuya característica distintiva es la utilización de una metodología de scoring, donde el score de una firma es comparado con el score de default determinado por la evidencia histórica de firmas que han incurrido en un evento de default. Finalmente, el tercer grupo estaría representado por la metodología conocida como *Reduced Form Approach*. A diferencia de los dos anteriores, este no descansa en un modelo sobre la firma ni sobre su score, sino que asume que el evento de default está simplemente determinado por una variable o factor externo.

Por su parte, la literatura también nos provee una variedad de alternativas para la valuación de opciones vulnerables, atendiendo al modelo de riesgo de crédito utilizado, la consideración del momento de default (antes o al vencimiento), la existencia de una barrera de default variable o fija, la configuración de la estructura de capital, la modelización del comportamiento de la tasa de interés (determinística o constante) y la existencia de correlación o no entre las variables involucradas. La posibilidad de arribar a una solución cerrada depende, como ha quedado demostrado en algunos de los trabajos que citamos a continuación, de los supuestos del modelo considerado.

La valuación de opciones vulnerables apelando al approach estructural fue propuesta originalmente por Johnson y Stulz (1987), quienes asumen que el evento de default puede ocurrir sólo al vencimiento de la opción y que la estructura de capital del emisor está compuesta únicamente por la opción en cuestión. Klein (1996) extiende el trabajo anterior, incorporando a la estructura de capital del emisor de la opción otras deudas, bajo el supuesto que la opción no integra o determina la barrera de default. Klein e Inglis (1999) proponen un modelo de opciones vulnerables con tasa de interés estocástica modelada siguiendo a Vasicek (1977), y extienden, posteriormente (2001), el modelo de Klein (1996) incorporando a la barrera de default a la deuda potencial resultante de la opción emitida. Como lo expresan los autores, no resulta posible, en este último caso, obtener una solución cerrada para la valuación de la opción debiéndose recurrir a métodos numéricos para tal propósito.

La característica común de todos los modelos citados anteriormente es que el default puede ocurrir sólo al vencimiento de la opción. Cao y Wei (2001) levantan este supuesto, proponiendo un modelo de valuación de opciones vulnerables, donde la estructura de capital de la firma está compuesta por la opción y otras deudas, el default puede ocurrir antes del vencimiento y la tasa de interés evoluciona de acuerdo con el proceso atribuido por Vasicek. La valuación de la opción la realizan mediante simulación de Monte Carlo, no pudiendo arribar a una solución analítica o cerrada para el precio del instrumento. Por su parte, Leland y Toft (1996) afirman que introducir una tasa de interés estocástica tiene un efecto de menor orden en el valor de la deuda, complicando significativamente el análisis.

La aplicación del Reduced Form Approach a la valuación de opciones vulnerables ha sido explorada entre otros por Hull y White (1995) y Jarrow y Turnbull (1995). Ambos trabajos asumen que el default puede ocurrir antes del vencimiento.

El supuesto de independencia entre el valor del activo de la firma y el valor del subyacente de la opción fue explorado por Hull y White (1995) y Jarrow y Turnbull (1995), entre otros. Tal supuesto simplifica considerablemente la

valuación del instrumento, pero como ha sido observado por Hull y White (1995) sólo es apropiado cuando el emisor es una institución bien diversificada.
Diferencias entre el *seniority* de la opción y la deuda que integra la estructura de capital de la firma constituye también un tema explorado en la literatura. Hull y White (1995), Klein (1996), Klein e Inglis (2001), Cao y Wei asumen que ambas deudas tienen el mismo *seniority*. De acuerdo a Hull (2000) un derivado es usualmente equiparado a un bono senior desprotegido frente a un evento de default, cobrando importancia en tal caso la consideración de este punto en la valuación de la opción.

De lo expuesto puede apreciarse la variedad de elecciones posibles en la problemática de la valuación de opciones vulnerables, alternativas que se derivan de las diferentes combinaciones que puede formular el autor respecto al modelo de riesgo de crédito utilizado, el momento de default, la existencia de una barrera de default fija o variable, la composición de la estructura de capital, el carácter determinístico o estocástico de la tasa de interés y la independencia o correlación entre las variables involucradas.

Modelo: Derivación de la Fórmula o Solución Cerrada

A efectos de nuestro propósito, asumiremos:

a.- Mercados perfectos, sin fricciones (ausencia de impuestos, costos de transacción, restricciones para short sales, agentes tomadores de precios).
b.- La negociación de activos es continua.
c.- Mercados completos.
d.- Ausencia de oportunidades de arbitraje.

e.- La tasa de interés, r, es conocida y constante e igual para todos los vencimientos

f.- El comportamiento del precio del subyacente, S, del instrumento satisface la siguiente ecuación diferencial estocástica, bajo la medida de probabilidad "real", P, con μ y σ constantes:

$$dS(t) = (\mu_S - q)S(t)dt + \sigma_S S(t)dW^P(t) \qquad (1)$$

donde:

μ: rentabilidad esperada del activo

q: tasa de dividendo o dividend yield

σ: desvío estándar de la rentabilidad del subyacente.

y W(t) representa un movimiento browniano estándar.

g.- El evento de default ocurre si al vencimiento del PE el valor del activo del emisor se encuentra por debajo de un cierto nivel de deuda, que identificaremos como D, el cual se asume determinado.

La formulación de este supuesto implica asumir que el límite de default, D, no se ve afectado por el valor del instrumento bajo consideración (PE), o que su participación en la estructura de capital de la firma es insignificante, tal como se asume en el trabajo de Klein (1996). Como mencionamos anteriormente, Klein e Inglis (2001) han demostrado que la incorporación de la deuda resultante de la opción al límite de default no permite obtener una solución cerrada.

h.- El valor del activo de emisor, que identificaremos como V, satisface la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dV = \mu_V V dt + \sigma_V V dW^P \qquad (2)$$

con:

$$E(dW_S^P, dW_V^P) = \rho dt \qquad (3)$$

donde ρ denota la correlación entre la rentabilidad de ambos activos, el subyacente del PE y el activo de la firma.

Las diferencias del presente modelo respecto al presentado en nuestro anterior trabajo se encuentran reflejadas en los supuestos g y h, referidos al riesgo de crédito y al proceso estocástico atribuido al valor de la firma.

Con respecto a la notación, en términos comparativos con el trabajo anterior, cabe observar que la incorporación de otro activo nos obliga a distinguir mediante subíndices las volatilidades y movimientos brownianos que afectan a cada uno de los dos activos, S y V.

En este caso, en presencia de riesgo de crédito, la función o promesa de pagos del instrumento adoptaría la siguiente forma:

$$f(T): \begin{cases} VN \text{ si } S(T) \leq X_i \text{ y } V(T) \geq D \\ \delta_T\, VN \text{ si } S(T) \leq X_i \text{ y } V(T) < D \\ VN(S(T)/S(0)) \text{ si } X_i < S(T) \leq X_s \text{ y } V(T) \geq D \\ \delta_T\, VN(S(T)/S(0)) \text{ si } X_i < S(T) \leq X_s \text{ y } V(T) < D \\ VNe^{iT} \text{ si } S(T) > X_s \text{ y } V(T) \geq D \\ \delta_T\, VNe^{iT} \text{ si } S(T) > X_s \text{ y } V(T) < D \end{cases}$$

donde:

$$\delta_T = \frac{V(T)}{D} \tag{4}$$

representa la tasa de recupero en caso de default, la cual se determina a partir de la relación entre el valor de la firma, al vencimiento del PE en T, y D.

En ausencia de oportunidades de arbitraje, conforme al Primer Teorema Fundamental de Finanzas al que hicimos referencia en el trabajo anterior, el valor del instrumento debe satisfacer:

$$\begin{aligned} f(t) = e^{-r\tau} E^Q \Big\{ & VN \mathbf{1}_{S(T) \le X_i} \left(\mathbf{1}_{V(T) \ge D} + \delta_T \mathbf{1}_{V(T) < D} \right) \\ & + VN \frac{S(T)}{S(0)} \mathbf{1}_{X_i < S(T) \le X_s} \left(\mathbf{1}_{V(T) \ge D} + \delta_T \mathbf{1}_{V(T) < D} \right) \\ & + VN e^{iT} \mathbf{1}_{S(T) > X_s} \left(\mathbf{1}_{V(T) \ge D} + \delta_T \mathbf{1}_{V(T) < D} \right) \Big\} \end{aligned} \tag{5}$$

A efectos de su evaluación, y apelando a las propiedades del operador valor esperado, podemos representar a la expresión anterior de la siguiente forma:

$$f(t) = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 \tag{6}$$

con:

$$f_1 = e^{-r\tau} E^Q \left(VN \mathbf{1}_{S(T) \le X_i} \mathbf{1}_{V(T) \ge D} \right) \tag{7}$$

$$f_2 = e^{-r\tau} E^Q\left(VN\delta_T \mathbf{1}_{S(T)\leq X_i} \mathbf{1}_{V(T)<D}\right) \tag{8}$$

$$f_3 = e^{-r\tau} E^Q\left(VN\frac{S(T)}{S(0)} \mathbf{1}_{X_i<S(T)\leq X_s} \mathbf{1}_{V(T)\geq D}\right) \tag{9}$$

$$f_4 = e^{-r\tau} E^Q\left(VN\frac{S(T)}{S(0)} \delta_T \mathbf{1}_{X_i<S(T)\leq X_s} \mathbf{1}_{V(T)<D}\right) \tag{10}$$

$$f_5 = e^{-r\tau} E^Q\left(VNe^{iT} \mathbf{1}_{S(T)>X_s} \mathbf{1}_{V(T)\geq D}\right) \tag{11}$$

$$f_6 = e^{-r\tau} E^Q\left(VNe^{iT} \delta_T \mathbf{1}_{S(T)>X_s} \mathbf{1}_{V(T)<D}\right) \tag{12}$$

De la evaluación de (7), (8), (9), (10), (11) y (12) se sigue:

$$f_1 = VNe^{-r\tau} N_2(d_1, d_2, -\rho) \tag{13}$$

con:

$$d_1 = \frac{ln\left(\frac{X_i}{S(t)}\right) - \left(r - q - \frac{\sigma_S^2}{2}\right)\tau}{\sigma_S\sqrt{\tau}}$$

$$d_2 = \frac{ln\left(\frac{V(t)}{D}\right) + \left(r - \frac{\sigma_V^2}{2}\right)\tau}{\sigma_V\sqrt{\tau}}$$

$$f_2 = VN\,\frac{V(t)}{D}\,N_2(d_3, d_4, \rho) \tag{14}$$

con

$$d_3 = \frac{ln\left(\frac{X_i}{S(t)}\right) - \left(r - q - \frac{\sigma_S^2}{2} + \rho\sigma_S\sigma_V\right)\tau}{\sigma_S\sqrt{\tau}} = d_1 - \rho\sigma_V\sqrt{\tau}$$

$$d_4 = \frac{ln\left(\frac{D}{V(t)}\right) - \left(r + \frac{\sigma_V^2}{2}\right)\tau}{\sigma_V\sqrt{\tau}} = -d_2 - \sigma_V\sqrt{\tau}$$

$$f_3 = VN\,\frac{S(t)}{S(0)}\,e^{-q\tau}[N_2(d_5, d_7, -\rho) - N_2(d_6, d_7, -\rho)] \tag{15}$$

con:

$$d_5 = \frac{ln\left(\frac{X_s}{S(t)}\right) - \left(r - q + \frac{\sigma_S^2}{2}\right)\tau}{\sigma_S\sqrt{\tau}}$$

$$d_6 = \frac{ln\left(\frac{X_i}{S(t)}\right) - \left(r - q + \frac{\sigma_S^2}{2}\right)\tau}{\sigma_S\sqrt{\tau}} = d_1 - \sigma_S\sqrt{\tau}$$

$$d_7 = \frac{ln\left(\frac{V(t)}{D}\right) + \left(r - \frac{\sigma_V^2}{2} + \rho\sigma_S\sigma_V\right)\tau}{\sigma_V\sqrt{\tau}} = d_2 + \rho\sigma_S\sqrt{\tau}$$

$$f_4 = VN\,\frac{S(t)}{S(0)}\frac{V(t)}{D}e^{(r-q+\rho\sigma_S\sigma_V)\tau}[N_2(d_8, d_{10}, \rho) - N_2(d_9, d_{10}, \rho)] \quad (16)$$

con:

$$d_8 = \frac{ln\left(\frac{X_s}{S(t)}\right) - \left(r - q + \frac{\sigma_S^2}{2} + \rho\sigma_S\sigma_V\right)\tau}{\sigma_S\sqrt{\tau}} = d_5 - \rho\sigma_V\sqrt{\tau}$$

$$d_9 = \frac{ln\left(\frac{X_i}{S(t)}\right) - \left(r - q + \frac{\sigma_S^2}{2} + \rho\sigma_s\sigma_V\right)\tau}{\sigma_S\sqrt{\tau}} = d_1 - \sigma_S\sqrt{\tau} - \rho\sigma_V\sqrt{\tau}$$

$$d_{10} = \frac{ln\left(\frac{D}{V(t)}\right) - \left(r + \frac{\sigma_V^2}{2} + \rho\sigma_S\sigma_V\right)\tau}{\sigma_V\sqrt{\tau}} = -d_2 - \sigma_V\sqrt{\tau} - \rho\sigma_S\sqrt{\tau}$$

$$f_5 = VNe^{iT-r\tau}N_2(d_{11}, d_2, \rho) \quad (17)$$

con:

$$d_{11} = \frac{ln\left(\frac{S(t)}{X_s}\right) + \left(r - q - \frac{\sigma_S^2}{2}\right)\tau}{\sigma_S\sqrt{\tau}} = -d_5 - \sigma_S\sqrt{\tau}$$

$$f_6 = VNe^{iT}\,\frac{V(t)}{D}N_2(d_{12}, d_4, -\rho) \quad (18)$$

con:

$$d_{12} = \frac{ln\left(\frac{S(t)}{X_s}\right) + \left(r - q - \frac{\sigma_S^2}{2} + \rho\sigma_S\sigma_V\right)\tau}{\sigma_S\sqrt{\tau}} = -d_5 - \sigma_S\sqrt{\tau} + \rho\sigma_V\sqrt{\tau}$$

donde por N_2 estamos representando a la probabilidad acumulada de una distribución normal bivariada.

La expresión final para la valuación del PE se obtiene simplemente de la adición de (13), (14), (15), (16), (17) y (18)

Una verificación que resulta pertinente formular en este caso es si el modelo converge a su versión sin riesgo de crédito, modelo del trabajo anterior (Perillo, 2021), cuando D = 0, el valor de la firma, V, es considerablemente superior al valor de la deuda, D y/o, siendo V superior a D el plazo al vencimiento del instrumento (PE) tiende a cero. En tal caso podemos comprobar, analizando el comportamiento de $d_1, \ldots\ldots\ldots d_{12}$ y de las correspondientes probabilidades acumuladas que aparecen en la expresión final, que el modelo converge al del nuestro anterior trabajo sin riesgo de crédito.

Tal comprobación la realizamos también numéricamente, empleando un ejercicio formulado al efecto, que resolvimos mediante la aplicación de los modelos obtenidos en los dos trabajos, desarrollando para ello un código en VBA(*).

(*) Agradecemos muy especialmente la colaboración del Profesor Mauro de Jesús, Magíster y Licenciado en Finanzas.

En la **Figura 1** a continuación mostramos los resultados que arroja el modelo sin riesgo de crédito para diferentes valores del subyacente y un VN de 100.

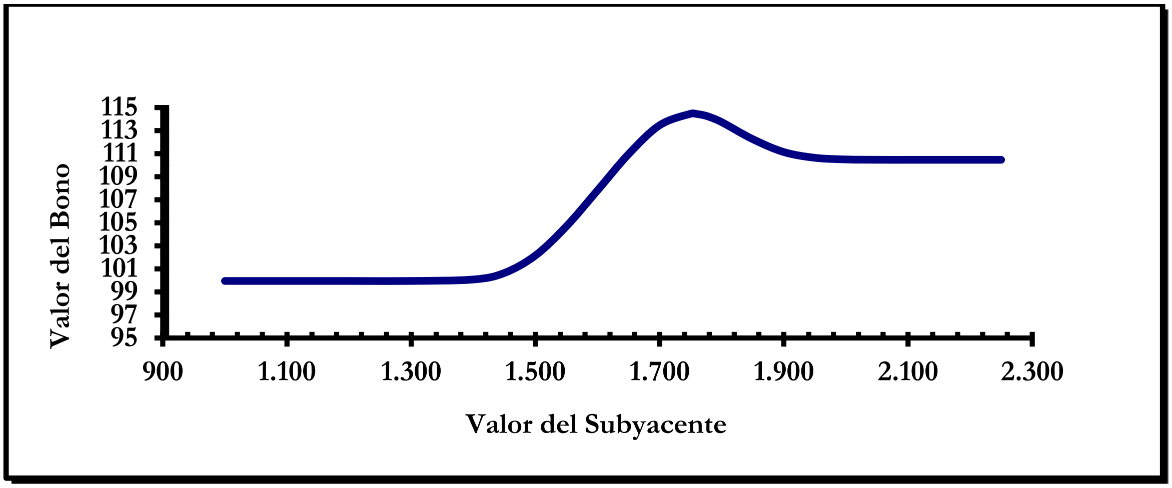

Figura 1. Valor del bono sin riesgo de crédito

En la **Figura 2** a continuación superponemos al resultado anterior el obtenido de la aplicación del modelo con riesgo de crédito.

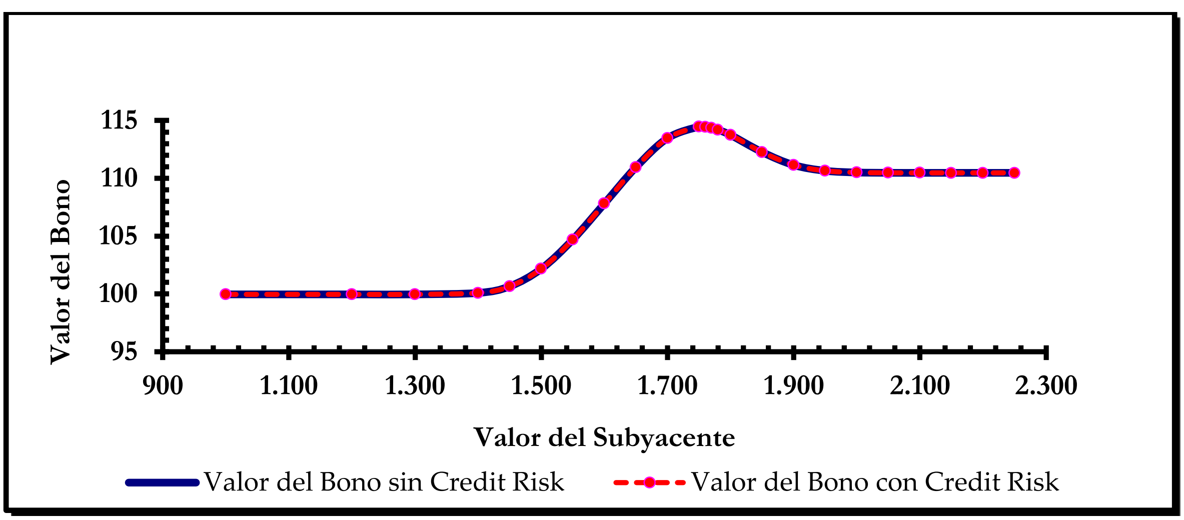

Figura 2. Valor del bono con y sin riesgo de crédito

Analítica y/o numéricamente puede comprobarse que el resultado esperado se satisface, convergiendo el resultado del modelo con riesgo de crédito al del nuestro primer trabajo cuando la probabilidad de default converge a cero.

Conclusiones

En el presente trabajo proponemos una solución analítica o "*closed form solution*" para la valuación de productos estructurados consistentes en instrumentos de deuda cuyo pago está atado al comportamiento de un índice accionario, apelando para ello a la teoría de valuación de instrumentos derivados.

Reconociendo que productos como el analizado no gozan, en general, de las garantías de los instrumentos derivados negociados en el ámbito bursátil, incorporamos a nuestro modelo la existencia de riesgo de crédito, apelando para tal fin al Approach Estructural propuesto originalmente por Robert Merton, y asumiendo un nivel de deuda determinado.

La expresión obtenida puede entenderse como un caso general del modelo propuesto en nuestro anterior trabajo, sin riesgo de crédito (Perillo, 2021).

La sección dedicada a la revisión de la literatura relacionada con la modelización del riesgo de crédito nos permite identificar diversas direcciones pasibles de exploración en futuros trabajos, adicionalmente a las que de por sí nos proporciona la teoría de valuación de instrumentos derivados.

Referencias

[1] Amman, M., (2001), Credit risk valuation: methods, models, and applications, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

[2] Black, F., Scholes, M., (1973), The pricing of options and corporate liabilities, *Journal of Political Economy*, 81, 637-654.

[3] Cao, M., Wei, J., (2001), Vulnerable options, risky corporate bond, and credit spread, *Journal of Futures Markets,* 21, 301-327.

[4] Harrison, J. M., Kreps, D. M., (1979), Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets, *Journal of Economic Theory,* 20, 381-408.

[5] Harrison, J. M., Pliska, S. R., (1981), Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading, *Stochastc Processes and Their Aplications*, 11, 215-260.

[6] Hull, J., White, A., (1995), The impact of default risk on the prices of options and other derivative securities, *Journal of Banking and Finance,* 19, 299-322-

[7] Jarrow, R.A., Turnbull, S. M., (1995), Pricing derivatives on financial securities subject to credit risk, *Journal of Finance,* 50, 53-85.

[8] Johnson, H., Stulz, R., (1987), The pricing of options with default risk, *Journal of Finance,* 42, 267-280.

[9] Klein, P., (1996), Pricing Black-Scholes options with correlated credit risk, *Journal of Banking and Finance,* 20, 1111-1129.

[10] Klein, P., Inglis, M., (1999), Valuation of European options subject to financial distress and interest rate risk, *Journal of Derivatives,* 6, 44-56.

[11] Klein, P., Inglis, M., (2001), Pricing vulnerable European option when the option´s payoff can increase the risk of financial distress, *Journal of Banking and Finance,* 25, 993-1012.

[12] Leland, H., Toft, K., (1996), Optimal capital structure, endogenous bankruptcy, and the term structure of credit spreads, *Journal of Finance*, 51, 987-1019.

[13] Merton, R. C., (1973), The theory of rational option pricing, *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4, 141-183.

[14] Merton, R. C., (1974), On the pricing of corporate debt: the risk structures of interest rates, *Journal of Finance*, 29, 449-470.

[15] Perillo, M., (2021), Valuación de títulos de deuda indexados al comportamiento de un índice accionario: Un modelo sin riesgo de crédito, *Serie Documentos de Trabajo UCEMA N°784*. https://ucema.edu.ar/publicaciones/download/documentos/784.pdf

[16] Vasicek, O., (1977), An equilibrium characterization of the term structure, *Journal of Financial Economics*, 5, 177-188.